

Clasa a IX a

1. Pentru fiecare număr natural m se notează $A_m = \{x \in \mathbb{Z} / |2x-1| + |3x-1| = m\}$.

a) Determinați A_8 ;

b) Arătați că, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, mulțimea A_m are cel mult un element ;

c) Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \in A_m$.

Lucian Dragomir

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \left[\frac{2x+3}{4} \right]$, unde $[a]$ reprezintă partea

întreagă a numărului real a .

a) Arătați că există $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $a \neq b$, pentru care $f(a) = f(b)$.

b) Studiați dacă următoarea afirmație este adevărată:

pentru orice $p \in \mathbb{Z}$, există $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(m) = p$.

c) Determinați numerele întregi k pentru care $1+k = 2 \cdot f(k^2)$.

* * *

3. Să se arate că dacă $a, b \in (0, \infty)$ și $a \cdot b = 1$, atunci : $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{a+b}$.

Lucian Dragomir

4. a) Să se arate că pentru orice punct M din planul unui paralelogram $ABCD$ are loc egalitatea $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$. Reciproca este adevărată ?

* * *

b) Se consideră un pentagon $ABCDE$ în care se notează cu M, N, P, Q punctele de intersecție ale segmentelor ce unesc mijloacele laturilor opuse în patrulateralele $BCDE$, $CDEA$, $EABD$, respectiv $ABCE$. Să se demonstreze că $MNPQ$ este paralelogram dacă și numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

Traian Tămăian, Carei, GM 4/2009

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.